



ISTITUTO DI ANALISI DEI SISTEMI ED INFORMATICA
“Antonio Ruberti”
CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

G. Pirillo

DODECAGONO REGOLARE E FRAZIONE
CONTINUA DI $\sqrt{3}$

R. 31, 2011

G. Pirillo – Consiglio Nazionale delle Ricerche, Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica “Antonio Ruberti”, Unità di Firenze, Dipartimento di Matematica “U.Dini”, Viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze, Italia and Université de Marne-la-Vallée, 5 boulevard Descartes, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France. Email: pirillo@math.unifi.it.

ISSN: 1128–3378

Collana dei Rapporti dell'Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica "Antonio Ruberti",
CNR

viale Manzoni 30, 00185 ROMA, Italy

tel. ++39-06-77161

fax ++39-06-7716461

email: iasi@iasi.cnr.it

URL: <http://www.iasi.cnr.it>

Il dodecagono regolare, a nostro parere poligono molto “utile” in didattica, possiede diagonali di cinque possibili lunghezze. Diciamo diagonali *lunghe* di un dodecagono regolare quelle che lo dividono in un esagono ed in un ottagono. Sia $\mathcal{D}=ABCDEFGHI LMN$ un dodecagono regolare. Tracciamo tutte le sue diagonali lunghe: vediamo apparire un altro dodecagono, $\mathcal{D}_1=A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1I_1L_1M_1N_1$, il dodecagono generato dalle diagonali lunghe di $\mathcal{D}$. Se, poi, tracciamo tutte le diagonali lunghe di $\mathcal{D}_1$ vediamo apparire (si veda [1]) ancora un altro dodecagono, $\mathcal{D}_2=A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2I_2L_2M_2N_2$ il dodecagono generato dalle diagonali lunghe di $\mathcal{D}_1$.

Possiamo dimostrare che:

- *due diagonali lunghe di $\mathcal{D}$ sono uguali* (potremmo procedere usando i criteri di uguaglianza dei triangoli o, più rapidamente, considererando rotazioni intorno al centro del cerchio circoscritto al dodecagono);
- *un lato di $\mathcal{D}$ è parallelo al corrispondente lato di $\mathcal{D}_1$* (è molto facile, per esempio provare che i lati BC e NE di $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}_1$ rispettivamente sono entrambi perpendicolari a MN e dunque tra loro paralleli; le altre relazioni di parallelismo si dimostrano analogamente);
- *una diagonale lunga di $\mathcal{D}$ è pari a quattro lati di $\mathcal{D}$ meno un lato di $\mathcal{D}_1$* (infatti $NE = 4BC - B_1C_1$; le altre uguaglianze si dimostrano analogamente);
- *il dodecagono $\mathcal{D}_1$ è regolare* (è una facile conseguenza di quanto già dimostrato).
- *una diagonale lunga di $\mathcal{D}_1$ è uguale ad un lato di $\mathcal{D}$* (basta tener conto del fatto che BN_1E_1C è un rettangolo).

Da quanto precede segue facilmente la seguente uguaglianza $BC = N_1E_1 = 4B_1C_1 - B_2C_2$.

Ponendo $x = \frac{BC - B_1C_1}{BC}$ abbiamo

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{BC - B_1C_1}{BC} = \frac{1}{\frac{BC}{BC - B_1C_1}} = \frac{1}{\frac{BC - B_1C_1 + B_1C_1}{BC - B_1C_1}} = \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{B_1C_1}{BC - B_1C_1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{BC - B_1C_1}{B_1C_1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4B_1C_1 - B_2C_2 - B_1C_1}{B_1C_1}}} = \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2B_1C_1 + B_1C_1 - B_2C_2}{B_1C_1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{B_1C_1 - B_2C_2}{B_1C_1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + x}} = \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}} = [0; 1, 2, 1, 2, \dots]
 \end{aligned}$$

Da $x = \sqrt{3} - 1$ e da $x = [0; 1, 2, 1, 2, \dots]$ segue $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots]$.

Ringraziamenti. Ringrazio J. Justin per le utilissime conversazioni ed il Dipartimento di Matematica U. Dini per la generosa ospitalità che mi concede.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] PIRILLO G., *Numeri irrazionali e segmenti incommensurabili*, Nuova Secondaria, 7, (2005) 97-103.